第 11 章　解三角形

11.1　余弦定理

1. B　【解析】因为$\triangle ABC$的三边长分别为$1,\sqrt{2},\sqrt{5}$，所以长为$\sqrt{5}$的边所对的角最大，其余弦值为$\frac{1^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}{2\times1\times\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以最大内角的度数是$135^\circ$，故选 B.

2. AD　【解析】由三角形三边的关系，得$1<c<5$.

又$a<b$，所以$\triangle ABC$中为钝角的可能为角B或角C.

则$\cos B=\frac{4+c^2-9}{2\times2c}<0$或$\cos C=\frac{4+9-c^2}{2\times2\times3}<0$，所以$4+c^2-9<0$或$4+9-c^2<0$，解得$1<c<\sqrt{5}$或$\sqrt{13}<c<5$.

所以选项 A，D 满足. 故选 AD.

3. D　【解析】由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-\frac{2}{3}ab=(a+b)^2-\frac{8}{3}ab=100-16=84$，所以$c=2\sqrt{21}$.

故选 D.

4. AD　【解析】由$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得$4=b^2+12-6b$，即$b^2-6b+8=0$，即$(b-2)(b-4)=0$，

由$b<c$，得$b=2$. 又$a=2$，$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$B=A=30^\circ$. 故选 AD.

5. D　【解析】因为$b^2+c^2=a^2+\sqrt{3}bc$，所以由余弦定理可得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又因为$0<A<\pi$，所以$A=$

$\frac{\pi}{6}$,故选 D.

6. C 【解析】把 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 代入已知等式,得 $b=c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,整理得 $a^2+b^2=c^2$,则 C 为直角. 故△ABC 一定是直角三角形.

7. D 【解析】因为 $\boldsymbol{p}=(a+c,-b)$,$\boldsymbol{q}=(a+b,a-c)$,$\boldsymbol{p}/\!/\boldsymbol{q}$,

所以 $(a+c)\cdot(a-c)-(-b)\cdot(a+b)=0$,即 $-ab=a^2+b^2-c^2$,

由余弦定理的推论可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$.

因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{2\pi}{3}$.

8. AC 【解析】对于 A,由 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}>0$ 可得 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}<0$,故 C 为钝角,故 A 符合题意;

对于 B,由 $a^2+b^2>c^2$ 可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>0$,又 $C\in(0,\pi)$,所以 C 为锐角,故 B 不符合题意;

对于 C,由于 A,B 均为锐角,

且 $\sin A=\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)<\cos B$,$\frac{\pi}{2}-A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

故 $\frac{\pi}{2}-A>B$,因此 $A+B<\frac{\pi}{2}$,故 C 为钝角,故 C 符合题意;

对于 D,由 $(b+c+a)(b+c-a)=3bc$ 可得 $(b+c)^2-a^2=3bc$,进而可得 $b^2+c^2-a^2=bc$,故 $\cos A=\frac{1}{2}$,因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$,无法确定 C 的大小,故 D 不符合题意. 故选 AC.

9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】设 $a+b=8t$,则 $b+c=$

$12t, c+a=10t, t>0$,

三式联立解得 $a=3t, b=5t, c=7t$,

由余弦定理的推论得 $\cos C = \frac{(3t)^2+(5t)^2-(7t)^2}{2\times 3t\times 5t} = -\frac{1}{2}$,

因为 $C\in(0,\pi)$,

所以 $C=\frac{2\pi}{3}$,则 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. C 【解析】当 $n=2$ 时,由 $a^2+b^2=c^2$,

得到 C 为直角;

当 $n>2$ 时,由 $a^n+b^n=c^n$,且 $c>0$,得到 $\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n=1$,所以 $\frac{a}{c},\frac{b}{c}\in(0,1)$,

故 $1=\left(\frac{a}{c}\right)^n+\left(\frac{b}{c}\right)^n<\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2$,得到 $a^2+b^2>c^2$,所以 $\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}>0$,即 C 为锐角;

又由 $\frac{a}{c},\frac{b}{c}\in(0,1)$,得 $c>a, c>b$,故 $C>60°$,即 $60°<C<90°$.

故选 C.

11.2　正弦定理

1. D 【解析】$\because \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,

$\therefore \sin A=\frac{a\sin C}{c}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $a>c$, $\therefore A>C$, $\therefore A=45°$ 或 $135°$,

故选 D.

2. C 【解析】$\because C=180°-30°-15°=135°$,

$\therefore \sin C=\sin 135°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由正弦定理得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

故选 C.

3. C 【解析】由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,

得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $a<b$,所以 $A<B$,所以 A 为锐角,所以 $A=\frac{\pi}{4}$. 故选 C.

4. $\sqrt{17}$　**【解析】**由 $\tan A=\frac{1}{4}$, $\tan B=\frac{3}{5}$, $A,B\in(0,\pi)$,

得 $0<A<B<\frac{\pi}{2}$,所以 $a<b$,

$\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-1<0$,

所以 $\frac{\pi}{2}<C<\pi$,所以 $C=\frac{3\pi}{4}$,所以 $a<b<c$,

故 $a=\sqrt{2}$,c 为最长的边.

由 $\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{1}{4}$,得 $\cos A=4\sin A$,

则 $\sin^2A+\cos^2A=17\sin^2A=1$,

所以 $\sin A=\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\left(\sin A=-\frac{1}{\sqrt{17}}\text{舍去}\right)$,

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,所以 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\sqrt{17}$,

即最长边的长为 $\sqrt{17}$.

5. C　**【解析】**在△ABC 中,$A>B\Leftrightarrow a>b$,若 $A\geqslant 90°$,则 $A>B$,即 $a>b$,故当 $a\leqslant b$ 时,此三角形不存在,故①说法正确;由 $A\geqslant 90°$,知 B 为锐角,则此三角形最多有一解,故②说法正确;当 $A<90°$,$a<b$ 时,若 $\frac{b\sin A}{a}>1$,则 $\sin B>1$,此三角形不存在,故③说法错误;若 $A<90°$,且 $a=b\sin A$,则 $\sin B=1$,即 $B=90°$,此三角形为直角三角形,故④说法正确;当 $A<90°$,且 $a=b$ 时,$A=B$,此三角形为

等腰三角形，只有一解，故⑤说法错误. 故正确说法的个数为 3.

6. D 【解析】由已知可得$\frac{1}{2}ac\sin 30°=\frac{3}{2}$，解得 $ac=6$. 又 $\sin A+\sin C=2\sin B$，由正弦定理可得 $a+c=2b$，由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-\sqrt{3}ac=4b^2-12-6\sqrt{3}$，化简得 $b^2=4+2\sqrt{3}$，则 $b=\sqrt{3}+1$. 故选 D.

7. ABD 【解析】A 选项，因为 $A=60°$，$a=b=2$，所以 $B=A=60°$，故 $C=60°$，则△ABC 是边长为 2 的等边三角形，有一解，故 A 正确；

B 选项，若 $A=30°$，$a=2$，$b=4\sqrt{3}$，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{2}{\sin 30°}=\frac{4\sqrt{3}}{\sin B}$，解得 $\sin B=\sqrt{3}>1$，无解，故 B 正确；

C 选项，若 $A=150°$，$a=3$，$b=4$，由大边对大角可知 $B>A$，此时△ABC 中有 2 个钝角，不存在这样的三角形，则△ABC 无解，故 C 错误；

D 选项，若 $A=45°$，$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$，由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{\sqrt{2}}{\sin 45°}=\frac{\sqrt{3}}{\sin B}$，解得 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $b>a$，所以 $B=60°$或 $120°$，

所以△ABC 有两解，故 D 正确. 故选 ABD.

8. D 【解析】由正弦定理得 $\sin A\cos A\cdot\cos B+\sin B\cos^2 A=\sin A\cos A$，

整理得 $(\sin A\cos B+\sin B\cos A-\sin A)\cos A=0$，

即 $[\sin(A+B)-\sin A]\cos A=0$，

所以 $[\sin(\pi-C)-\sin A]\cos A=0$，

即 $(\sin C-\sin A)\cos A=0$，

所以 $\sin C=\sin A$ 或 $\cos A=0$，

解得 $A=C$ 或 $A=\frac{\pi}{2}$，即△ABC 的形状是等腰三角形或直角三角形. 故选 D.

9. B 【解析】$a-b=2a\sin^2\frac{C}{2}=2a\times\frac{1-\cos C}{2}=a-a\cos C$，故 $b=a\cos C$，

由正弦定理得 $\sin B=\sin A\cos C$，

又 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

所以 $\cos A\sin C=0$.

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq0$，

故 $\cos A=0$，

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{2}$，

所以△ABC 的形状为直角三角形.

10. C 【解析】依题意，$a\cos B-b\cos 2A=c$，

由正弦定理得 $\sin A\cos B-\sin B(2\cos^2A-1)=\sin C$，$\sin A\cos B-\sin B(2\cos^2A-1)=\sin(A+B)$，$\sin A\cos B-\sin B(2\cos^2A-1)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，$-\sin B(2\cos^2A-1)=\cos A\sin B$，

由于 $0<B<\pi$，$\sin B>0$，

所以 $2\cos^2A+\cos A-1=0$，

$(2\cos A-1)(\cos A+1)=0$，

由于 $0<A<\pi$，所以 $\cos A+1\neq0$，所以 $2\cos A-1=0$，$\cos A=\frac{1}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$，

所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\times2=4$，$a=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$. $\frac{a^2}{b+c}=\frac{2\sqrt{3}\sin A}{\sin B+\sin C}=3\times\frac{1}{\sin B+\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)}=3\times\frac{1}{\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B}=3\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B}=\sqrt{3}\times\frac{1}{\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)}$，

由于△ABC是锐角三角形，所以

$\begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2},\\0<\dfrac{2\pi}{3}-B<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 即 $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$，所以

$\dfrac{\pi}{3}<B+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$，所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，所以 $1\leqslant\dfrac{1}{\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)}<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$\sqrt{3}\leqslant\sqrt{3}\times\dfrac{1}{\sin\left(B+\dfrac{\pi}{6}\right)}<2$，

所以$\dfrac{a^2}{b+c}$的取值范围是$[\sqrt{3},2)$.

11. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 【解析】∵ $\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$，∴ $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，

∴ $\sin^2B-\sin^2C+(\sin A+\sin B)\cdot\sin A=0$，

∴ 由正弦定理得 $b^2-c^2+a^2+ab=0$，

∴ $a^2+b^2-c^2=-ab$，

∴ $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\dfrac{1}{2}$，且 $C\in(0,\pi)$，∴ $C=\dfrac{2\pi}{3}$.

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab$，根据余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

即 $3=a^2+b^2+ab$，$3-ab=a^2+b^2\geqslant 2ab$，

$3ab\leqslant 3$，$ab\leqslant 1$，

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，

∴ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ab\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，即△ABC面积的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

12. 6 【解析】已知 $b+c=a(\cos C+\sqrt{3}\sin C)$，

由正弦定理可得 $\sin B+\sin C=\sin A(\cos C+\sqrt{3}\sin C)$，

又 $\sin B=\sin(A+C)$，

所以 $\sin A\cos C+\cos A\sin C+\sin C=\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C$，且 $C\in(0,\pi)$，$\sin C\neq 0$，

所以上式化简得 $\cos A+1=\sqrt{3}\sin A$,

即 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,因为 $A\in(0,\pi)$,

所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

由余弦定理的推论可得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,

得到 $b^2+c^2-4=bc$,所以 $bc=\frac{(b+c)^2-4}{3}\leqslant\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$,当且仅当 $b=c$ 时等号成立,

所以 $(b+c)^2\leqslant 16$,故 $b+c\leqslant 4$.

因为三角形的两边之和大于第三边,

所以 $b+c>2$,即 $2<b+c<4$.

综上,$4<a+b+c\leqslant 6$,则周长的最大值为 6.

13.【解】(1)因为 $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{a+c}{2}+b\cos B$,

所以$\frac{a(1+\cos C)}{2}+\frac{c(1+\cos A)}{2}=\frac{a+c}{2}+b\cos B$,即 $a\cos C+c\cos A=2b\cos B$.

由正弦定理得 $\sin A\cos C+\sin C\cdot\cos A=2\sin B\cos B$,

即 $\sin(A+C)=2\sin B\cos B$,

即 $\sin B=2\sin B\cos B$.

又 $0<B<\pi$,则 $\sin B>0$,

所以 $\cos B=\frac{1}{2}$,则 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由 $\triangle ABC$ 的面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$,

得$\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}$,

则 $ac=1$,

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-ac$,代入 $b=\sqrt{2}$,得 $a^2+c^2=3$,

则 $a+c=\sqrt{a^2+2ac+c^2}=\sqrt{5}$,故 $\triangle ABC$ 的周长为$\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

14.【解】(1)由 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos 2x=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\right.$

$\left.\frac{\pi}{6}\right)$,

由题知,当 $x=A$ 时,$f(x)$ 取得最大值,

因为 $A\in(0,\pi)$,

所以 $2A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$,

故当 $2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即 $A=\frac{\pi}{3}$时,$f(x)$ 取得最大值,即 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 AD 为 BC 边上的中线,所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

则 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2)$,

故 $4=\frac{1}{4}(c^2+2bc\cdot\cos\angle BAC+b^2)=\frac{1}{4}(c^2+b^2+bc)\geqslant\frac{1}{4}(2bc+bc)=\frac{3}{4}bc$,

即 $bc\leqslant\frac{16}{3}$,当且仅当 $b=c=\frac{4\sqrt{3}}{3}$时等号成立. 所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

故△ABC 的面积的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

15.【解】(1)在△ABC 中,由 $b^2+c^2-bc=a^2$,得 $b^2+c^2-a^2=bc$,

由余弦定理的推论得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$,

又 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)方法一(正弦定理边化角):

在△ABC 中,由正弦定理得,

$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 $b+c=\frac{2\sqrt{3}}{3}(\sin B+\sin C)$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\sin B+\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)$

$=2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$,

因为 $B\in\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$, 所以 $B+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$, 所以 $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$.

故 $b+c\in(1,2]$,

则 $2<a+b+c\leqslant 3$,

故△ABC 的周长的取值范围是$(2,3]$.

方法二(余弦定理+基本不等式):因为 $a=1$, $b^2+c^2-bc=a^2$,

所以 $1=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc\geqslant(b+c)^2-3\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(b+c)^2$,

因此$(b+c)^2\leqslant 4$,解得 $b+c\leqslant 2$,当且仅当 $b=c=1$ 时取等号,

而 $b+c>a=1$(提示:三角形的两边之和大于第三边),

所以 $2<a+b+c\leqslant 3$,故△ABC 的周长的取值范围是$(2,3]$.

(3)因为 $a=1$, $b^2+c^2-bc=a^2$,

所以 $bc=\frac{(b+c)^2-1}{3}=\frac{1}{3}(b+c+1)\cdot(b+c-1)$.

设△ABC 的内切圆半径为 r,

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}(a+b+c)r$,

由(1)知 $A=\frac{\pi}{3}$,

所以 $r=\frac{bc\sin A}{a+b+c}=\frac{\sqrt{3}bc}{2(1+b+c)}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot(b+c-1)$.

由(2)得,$b+c=2\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$,

因为△ABC 为锐角三角形,

所以$\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2}{3}\pi-B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$,

所以$\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$,

则 $\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,

因此 $b+c\in(\sqrt{3},2]$,所以 $r=\frac{\sqrt{3}}{6}(b+c-1)\in\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right]$.

故△ABC 内切圆半径的取值范围为$\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{3}}{6}\right]$.

16. 等边三角形 【解析】$\because a\geqslant b\geqslant c$,

$\therefore 1>\sin A\geqslant\sin B\geqslant\sin C>0$,

$\therefore \log_{\sin A}\sin B\geqslant\log_{\sin A}\sin A=1$,

$\log_{\sin B}\sin C\geqslant\log_{\sin B}\sin B=1$,

$\log_{\sin C}\sin A\leqslant\log_{\sin C}\sin C=1$,

$\therefore \log_{\sin A}\sin B+\log_{\sin B}\sin C\geqslant 2$,

$2\log_{\sin C}\sin A\leqslant 2\log_{\sin C}\sin C=2$,

$\therefore$ 若 $\log_{\sin A}\sin B+\log_{\sin B}\sin C=2\log_{\sin C}\sin A$,则 $\log_{\sin A}\sin B+\log_{\sin B}\sin C=2\log_{\sin C}\sin C=2$,

当且仅当 $\sin A=\sin B=\sin C$ 时取等号.

$\therefore$ △ABC 的形状是等边三角形.

11.3 余弦定理、正弦定理的应用

1. B 【解析】在△CDB 中,由题意可得$\angle CDB=45°$,由正弦定理$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{BC}{\sin\angle CDB}$,可得 $BC=\frac{BD\cdot\sin\angle CDB}{\sin\angle BCD}=\frac{45\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=15\sqrt{6}$(m).

由题知,$\angle ACB=60°$,在 Rt△ABC 中,$AB=BC\cdot\tan\angle ACB=15\sqrt{6}\times\sqrt{3}=45\sqrt{2}$(m),所以该座山的高度为 $45\sqrt{2}$ m. 故选 B.

2. C 【解析】设 $AB=m$ m,则在Rt△ABC 中,$BC=\frac{m}{\tan 60°}=\frac{m}{\sqrt{3}}$. 在△$BCD$ 中,$\angle CBD=180°-30°-45°=105°$,由正弦定理得$\frac{CD}{\sin 105°}=\frac{BC}{\sin 45°}$,因为

$\sin 105° = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，代入数据，解得 $m = 90-30\sqrt{3} \approx 90-30\times1.7=39$，故选 C.

3.【解】(1) 在直角三角形 BCP 中，$\tan\angle PBC = \frac{PC}{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{BC} = \sqrt{3}$，故 $BC=2$.

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BCA = 180° - 15° - 120° = 45°$，由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{AB}{\sin\angle BCA}$，解得 $AB = 2(\sqrt{3}+1)$，从 A 到 B 共花 20 分钟，故巡逻船的航行速度为 $6(\sqrt{3}+1)$ km/h.

(2) 在 $\triangle BCD$ 中，$BC=2$，$BD=\sqrt{3}+1$，$\angle DBC=60°$，由余弦定理可得 $CD=\sqrt{6}$，在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin\angle DBC} = \frac{CB}{\sin\angle CDB}$，则 $\sin\angle CDB = \frac{\sqrt{2}}{2}$，而 $CD > CB$，则 $\angle CDB < \angle DBC$，故 $\angle CDB = 45°$，所以此时山底 C 位于 D 处的南偏东 45°方向.

4. B【解析】如图所示，因为在 A 点测得 M, N 的俯角分别为 75°，30°，

所以 $\angle MAB = 75°$，$\angle NAB = 30°$，

因为在 B 点测得 M, N 的俯角分别为 45°，60°，所以 $\angle MBA = 45°$，$\angle NBA = 180°-60°=120°$.

在 $\triangle ABM$ 中，已知 $\angle MAB = 75°$，$\angle MBA = 45°$，则 $\angle AMB = 60°$，

由正弦定理得 $\frac{AM}{\sin\angle ABM} = \frac{AB}{\sin\angle AMB}$，

所以 $AM = \frac{AB\cdot\sin\angle ABM}{\sin\angle AMB} = \frac{6\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{6}$ (km).

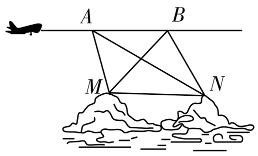
因为 $\angle NAB = 30°$，$\angle ABN = 120°$，则 $\angle ANB = 30°$，所以 $AB = BN = 6$ km，

在 $\triangle ABN$ 中，由余弦定理得 $AN^2 = AB^2+BN^2-2AB\cdot BN\cos 120° = 108$，所以 $AN = 6\sqrt{3}$ km.

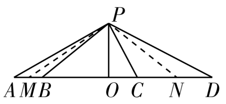
因为 $\angle MAB=75°$，$\angle NAB=30°$，所以 $\angle MAN=45°$，

在 $\triangle AMN$ 中，由余弦定理得，$MN^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cdot\cos 45°$，

故 $MN^2=24+108-72=60$，所以 $MN=2\sqrt{15}$ km. 故选 B.



5. D 【解析】因为 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=0$，所以 $PB\perp PC$. 因为 $PO\perp BC$，所以 $\triangle POC\backsim\triangle BOP$，所以 $\frac{PO}{BO}=\frac{OC}{OP}$，所以 $PO^2=OB\cdot OC$. 因为 $BO=16$ m，$PO=12$ m，所以 $OC=9$ m. 如图，设 M，N 分别为 AB，CD 的中点，连接 PM，PN. 因为 $\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})=2\overrightarrow{PO}$，所以 $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}=2\overrightarrow{PO}$，所以 O 为 MN 的中点，因为 $AB=8$ m，$BO=16$ m，所以 $OM=20$ m，所以 $ON=20$ m，所以 $CN=ON-OC=20-9=11$(m)，所以 $CD=2CN=22$(m). 故选 D.



6. ABD 【解析】对于 A 选项，在 $\triangle ACD$ 中，$\angle ACD=\angle ACB+\angle BCD=60°+45°=105°$，因为 C 在 D 的正西方向，所以 A 在 C 的北偏西 $15°$ 方向，故 A 正确；

对于 B 选项，在 $\triangle ACD$ 中，$\angle ACD=105°$，$\angle ADC=30°$，则 $\angle CAD=45°$. 由正弦定理，得 $AC=\frac{CD\sin\angle ADC}{\sin\angle CAD}=\sqrt{2}$，故 B 正确；

对于 C 选项，在 $\triangle BCD$ 中，$\angle BCD=45°$，$\angle CDB=\angle ADC+\angle ADB=30°+60°=90°$，所以 $\angle CBD=45°$，则 $BD=CD=2$，于是 $BC=2\sqrt{2}$，故 C 不正确；

对于D选项,在$\triangle ABC$中,由余弦定理,得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB=2+8-2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=6$,即$AB=\sqrt{6}$,故D正确.故选ABD.

7. $100\sqrt{2}$ 【解析】在$Rt\triangle ACM$中,$\angle MAC=60°$,$AC=100$,所以$AM=\frac{AC}{\cos 60°}=\frac{100}{\frac{1}{2}}=200$.在$Rt\triangle ABN$中,$\angle NAB=30°$,$AB=50\sqrt{6}$,所以$AN=\frac{AB}{\cos 30°}=\frac{50\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=100\sqrt{2}$.在$\triangle AMN$中,$\angle MAN=45°$,$AM=200$,$AN=100\sqrt{2}$,由余弦定理,得$MN^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cos 45°=200^2+(100\sqrt{2})^2-2\times200\times100\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=100^2\times2$,所以$MN=100\sqrt{2}$.

8.【解】(1)在$\triangle BCD$中,由正弦定理知$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$,所以$\frac{BD}{\sin\frac{2\pi}{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sin\frac{\pi}{4}}$,解得$BD=6$.

若选条件①,因为$\angle BCD=\frac{2\pi}{3}$,$\angle CBD=\frac{\pi}{4}$,所以$\angle BDC=\frac{\pi}{12}$,

所以$\angle BDE=\frac{\pi}{2}$.

在$Rt\triangle BDE$中,$BE=\sqrt{BD^2+DE^2}=10$.

故服务通道BE的长度为10 km.

若选条件②,在$\triangle BDE$中,由余弦定理知$\cos\angle DBE=\frac{BD^2+BE^2-DE^2}{2BD\cdot BE}=\frac{3}{5}$,

化简得$5BE^2-36BE-140=0$,

解得$BE=10$或$BE=-\frac{14}{5}$(舍去).

故服务通道BE的长度为10 km.

(2)在$\triangle ABE$中,由余弦定理知,$BE^2=BA^2+AE^2-2BA\cdot AE\cdot\cos\angle BAE$,

所以 $100=BA^2+AE^2+BA\cdot AE$，

所以 $(BA+AE)^2-BA\cdot AE=100$，

即 $(BA+AE)^2-100=BA\cdot AE\leqslant\frac{(BA+AE)^2}{4}$，

当且仅当 $BA=AE$ 时，等号成立，故 $\frac{3}{4}(BA+AE)^2\leqslant100$，$BA+AE\leqslant\frac{20\sqrt{3}}{3}$，即 $BA+AE$ 的最大值为$\frac{20\sqrt{3}}{3}$.

故当 $AB=AE$ 时，折线段赛道 BAE 最长，最长为$\frac{20\sqrt{3}}{3}$km.